

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“29” серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Варіаційне числення та оптимальне керування

рівень вищої освіти _____ перший (бакалаврський) рівень

галузь знань _____ 11 – Математика та статистика

спеціальність _____ 113 Прикладна математика

освітня програма _____ Прикладна математика

спеціалізація _____

вид дисципліни _____ обов'язкова

факультет _____ математики і інформатики

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Бєбія Максим Отарійович**, канд. фіз.-мат. наук, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «**Варіаційне числення та оптимальне керування**» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 – Прикладна математика

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Варіаційне числення та оптимальне керування» є навчання майбутніх спеціалістів сучасним методам варіаційного числення та оптимізації, в тому числі у теорії оптимального керування.

1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

Основними завданнями є оволодіння основами теорії екстремальних задач та розвинення здатності ефективно застосовувати методи оптимізації до розв'язання конкретних практичних задач.

1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей:

ІК01.Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей:

ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК03. Здатність обирати та застосовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач, моделювання, аналізу, проектування, керування, прогнозування, прийняття рішень.

ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

ФК18. Здатність оцінити рівень математичного обґрунтування методів, які застосовуються для розв'язання конкретних прикладних задач.

1.3. Кількість кредитів – 4

1.4. Загальна кількість годин –120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
<u>обов'язкова</u>	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	–
Семестр	
6-й	–
Лекції	
32 год.	–

Практичні, семінарські заняття	
32 год.	–
Лабораторні заняття	
–	–
Самостійна робота	
56 год.	–
в тому числі індивідуальне завдання	
-	

1.6. Заплановані результати навчання

Знати : постановку задачі варіаційного числення, рівняння Ейлера як необхідну умову екстремуму першого порядку, умови екстремуму другого порядку в задачі варіаційного числення, метод множників Лагранжа, критерії керованості лінійних систем, критерії спостережуваності лінійних систем, методи дослідження задач оптимальної стабілізації, постановку задачі оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна.

Вміти : розв'язувати задачі за вивченими розділами.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких програмних результатів навчання:

РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.

РН06. Володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдності, а також якісних властивостей їх розв'язків.

РН10. Володіти методиками вибору раціональних методів та алгоритмів розв'язання математичних задач оптимізації, дослідження операцій, оптимального керування і прийняття рішень, аналізу даних.

РН21. Демонструвати розуміння загальних принципів побудови математичних теорій, основних понять логіки, уміти формулювати та доводити математичні твердження.

РН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприкладів, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

2. Тематичний план навчальної дисципліни

Розділ 1. Задача варіаційного числення

Тема 1. Рівняння Ейлера.

Постановка задачі варіаційного числення, приклади. Поняття варіації. Рівняння Ейлера як необхідна умова екстремуму першого порядку. Екстремалі. Задачі з рухомими кінцями. Необхідні умови у задачі Больца та ізопериметричній задачі.

Тема 2. Необхідні і достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.

Сильний та слабкий екстремум. Поняття другої варіації. Необхідна умова Лежандра. Спряжені точки. Необхідна умова Якобі. Достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.

Тема 3. Умови сильного екстремуму.

Поняття поля екстремалей. Необхідна і достатня умова Вейерштрасса.

Розділ 2. Теорія керування

Тема 4. Керованість лінійних систем.

Постановка задачі керованості. Керованість лінійних систем, критерій Калмана. Побудова керувань, що розв'язують задачу потрапляння із токи в точку за заданий час для повністю керованих лінійних систем.

Тема 5. Спостережуваність лінійних систем.

Постановка задачі спостережуваності. Критерії спостережуваності для лінійних систем.

Тема 6. Керування нелінійними системами.

Керованість та стабілізованість нелінійних трикутних систем. Теорема Коробова. Відображення трикутних систем на лінійні. Знаходження оберненого відображення.

Розділ 3. Задача оптимального керування**Тема 7. Лінійна задача швидкодії.**

Постановка лінійної задачі швидкодії. Множина досяжності і її властивості. Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії.

Тема 8. Загальна задача оптимального керування.

Постановка загальної задачі оптимального керування. Формулювання принципу максимуму Понтрягіна. Умови трансверсальності. Задача варіаційного числення як задача оптимального керування.

Тема 9. Задача оптимальної стабілізації.

Постановка задачі оптимальної стабілізації. Перша теорема Красовського.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Задача варіаційного числення						
Тема 1. Рівняння Ейлера.	14	6	4			4
Тема 2. Необхідні і достатні умови другого порядку для слабкого екстремуму.	14	4	4			6
Тема 3. Умови сильного екстремуму.	10	2	2			6
<i>Контрольна робота</i>	2		2			
Разом за розділом 1	40	12	12			16
Розділ 2. Теорія керування						
Тема 4. Керованість лінійних систем.	15	4	2			9
Тема 5. Спостережуваність лінійних систем.	12	2	2			8
Тема 6. Керування нелінійними системами.	11	2	2			7
Разом за розділом 2	38	8	6			24
Розділ 3. Задача оптимального керування						
Тема 7. Лінійна задача швидкодії.	17	6	6			5

Тема 8. Загальна задача оптимального керування.	12	4	4		4
Тема 9. Задача оптимальної стабілізації.	11	2	2		7
<i>Контрольна робота</i>	2		2		
Разом за розділом 3	42	12	14		16
Усього годин	120	32	32		56

4. Теми практичних занять

№	Назва розділу або теми	Кількість годин
1	Задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера.	2
2	Задача Больца, ізопериметрична задача	2
3	Умови другого порядку слабкого екстремуму в задачі варіаційного числення.	4
4	Умови сильного екстремуму.	2
5	Контрольна робота з варіаційного числення.	2
6	Теорія керування. Керованість лінійних систем.	2
7	Спостережуваність лінійних систем.	2
8	Керування нелінійними системами.	2
9	Задача керованості в теорії оптимального керування. Лінійні керовані системи. Потрапляння з обмеженим керуванням.	2
10	Задача лінійної швидкодії, принцип максимуму Понтрягіна.	2
11	Задача найшвидшої зупинки візка, задача зупинки маятника.	2
12	Загальна задача оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна.	2
13	Умова трансверсальності.	2
14	Контрольна робота	2
15	Задача оптимальної стабілізації.	2
	Разом	32

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Розв'язування задач з теми «Задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера, екстремалі».	4
2	Виконання домашніх завдань з теми «Умова Лежандра. Рівняння Якобі, знаходження спряжених точок».	6
3	Виконання домашніх завдань з теми «Поле екстремалей. Функція Вейерштрасса».	6
4	Вивчення літератури з теми «Керованість лінійних систем. Канонічна форма».	9

5	Розв'язування задач з теми «Спостережуваність лінійних систем».	8
6	Вивчення літератури з теми «Керування нелінійними системами. Відображуваність нелінійних систем».	7
7	Навести приклади з теми «Лінійна задача керованості, побудова допустимих керувань».	1
8	Дослідити питання про час потрапляння з більшою кількістю перемикачів по темі «Лінійна задача швидкодії. Задача найшвидшої зупинки візка, побудова кривої перемикачів».	4
9	Розв'язування задач з теми «Задача оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна та його застосування для знаходження екстремальних керувань».	2
10	Вивчення літератури з теми «Задача оптимального керування з рухомими кінцями, умова трансверсальності».	2
11	Виконання домашніх завдань з теми «Задача оптимальної стабілізації».	3
12	Вивчення літератури з теми «Експоненціальна стабілізація».	4
	Разом	56

6. Індивідуальні завдання

Не передбачені

7. Методи навчання

Лекції з використанням частково-пошукового методу, проблемні лекції, пояснення, розрахункові та пояснювально-ілюстративні методи при проведенні практичних занять.

8. Методи контролю

1. Перевірка виконання домашніх завдань
2. Облік відвідування аудиторних занять
3. Перевірка контрольних робіт
4. Усне опитування
5. Перевірка екзаменаційної роботи

9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Розділ 3	Контрольні роботи, передбачені навчальним планом	Індивідуальні завдання	Разом		
T1–T3	T4–T6	T7–T9					
15	15	10	20	---	60	40	100

T1–T9 – теми розділів.

Для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, самостійної роботи.

Поточний контроль, самостійна робота – до 40 балів,
контрольні роботи – до 20 балів,
екзаменаційна робота – до 40 балів.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль враховує активність під час практичних занять та правильність виконання домашніх завдань, за кожне з яких разом можна отримати до 4 балів.

Перша контрольна робота полягає у розв'язанні задачі варіаційного числення.

Друга контрольна робота полягає у розв'язанні задачі оптимального керування. Кожна з робіт оцінюється максимум у 10 балів відповідно до правильності та повноти розв'язання.

Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань та однієї задачі. Кожне з теоретичних питань оцінюється максимум у 15 балів. Максимальну кількість балів можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то він отримує максимум 12 балів. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, він отримує максимум 5 балів. Максимальна оцінка за задачу складає 10 балів. Незначні арифметичні помилки, які якісно не вплинули на результат, не впливають на кількість балів.

Шкала оцінювання чотирирівнева

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. – К.: Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, 2010. - 212 с.
2. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994. – 328 с.

3. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
4. Моклячук М. П. Збірник задач з варіаційного числення та методів оптимізації.– Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 255 с.

Допоміжна література

5. John A. Burns, Introduction to the calculus of variations and control with modern applications. – CRC Press Taylor & Fransis Group, Boca Raton, 2014. – 544 p.
6. E.B. Lee and L. Markus, Foundations of optimal control theory. – John Wiley, New York, 1967. – 576 p.
7. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishechenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. – John Wiley & Sons, New York-London, 1962.–360 p.
8. Піддубний О.М., Харкевич Ю.І. Варіаційне числення та методи оптимізації. Луцьк: Східноєвроп. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2017. – 332 с.
9. Клименко М.І., Панасенко Є.В., Стреляєв Ю.М., Ткаченко І. Г. Варіаційне числення та методи оптимізації. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 84 с.

11. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_control